विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचितः मानव धर्म प्रणेता
सद्‌गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

"Obvious" is the most dangerous word in mathematics........Ball, Epic Temple

द्विपद व्यंजक (Binomial expression):

कोई बीजगणितीय व्यंजक जिसमें दो असमान पद है, द्विपदीय व्यंजक कहलाताहै।

उदाहरण : $x+y, x^2y+\frac{1}{xy^2}, 3-x, \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{(x^3+1)^{1/3}}$

द्विपद प्रमेय में उपयोग की जाने वाली परिभाषाएँ (Terminology used in binomial theorem):

क्रम गुणित : $\underline{|n}$ का n! उच्चारण क्रम गुणित n है तथा इस तरह से दिया जाता है–

$$n! = \begin{cases} n(n-n)(n-2).......3.2.1 & ; \text{यदि } n\in N \\ 1 & ; \text{यदि } n=0 \end{cases}$$

नोट : $n! = n.(n-(!;$ $\quad n\in N$

---

^nC_r **का गणितीय अर्थ** : पद ^nC_r भिन्न n वस्तुओं से r वस्तुओं के चयन के संचयों की संख्या को निर्देशित करता है।

$$^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!n!}$$

नोट : ^nC_r के दूसरे चिन्ह $\binom{n}{r}$ तथा C(n, r) है। ^nC_r से संबंधित गुणधर्म (i) $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

नोट : यदि $^nC_x = {}^nC_y$ $\Rightarrow$ या तो $x = y$ या $x + y = n$

(ii) $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ (iii) $\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$

(iv) $^nC_r = \frac{n}{r}{}^nC_{r-1} = \frac{n(n-1)}{r(r-1)}{}^{n-2}C_{r-2} = ... = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-(r-1))}{r(r-1)(r-2)......2.1}$

(v) यदि n और r सह अभाज्य है, तो ^nC_r, n से विभाजित है लेकिन इसके विपरीत सही हो, ये जरूरी नहीं

द्विपद प्रमेय का कथन (Statement of binomial theorem):

$(a+b)^n = {}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_ra^{n-r}b^r + ... + {}^nC_na^0b^n$

जहाँ $n \in N$ या $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r a^{n-r} b^r$

नोट : यदि हम ऊपर दिये गये द्विपद प्रसार में a = 1 तथा b = x रखते है। तो

या $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC_n x^n$

या $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$

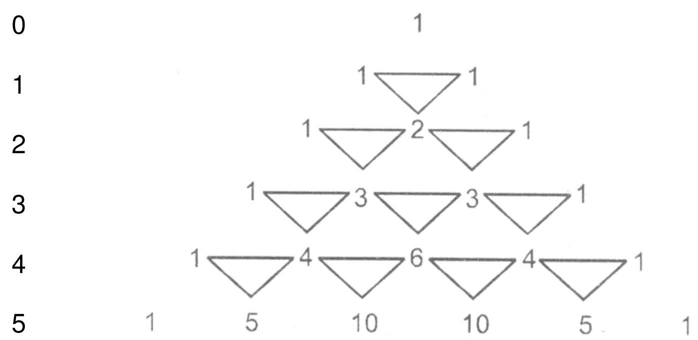
अवलोकर (Observations) :

(i) द्विपद प्रसार $(a+b)^n$ में पदों की संख्या n + 1 है।

(ii) प्रत्येक पद में a और b की घातों का योग n है।

(iii) द्विपद गुणांक $({}^nC_0, {}^nC_1 ....{}^nC_n)$ के शुरूआत और अन्त से, जो पद समान दूरी पर है, बराबर है।
अर्थात $^nC_0 = {}^nC_n, {}^nC_1 = {}^nC_{n-1}$ इत्यादि $\{\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}\}$

(iv) द्विपद गुणांक पास्कल के त्रिभुज की सहायता से याद किये जा सकत हैं (पिंगला (Pingla) से दिया गया Meru Prastra के नाम से भ जाना जाता है।)
Index of the binomial The binomial coefficient



Pascal के त्रिभुज की सहातय से हम निम्न बिन्दु प्राप्त करते है–

(a) त्रिभुज की प्रत्येक पंक्ति 1 से शुरू होती है और 1 से खत्म होती है।

(b) एक पंक्ति में प्रत्येक प्रवेश पहले के दोनों प्रवेशों का योग है, एक जो तुरन्त बाँये तरफल है और दूसरी जो तुरन्त दाँयी तरफ है।

सामान्य पद (General term) :

$(x+y)^n = {}^nC_0 x^n y^0 + {}^nC_1 x^{n-1} y^1 + ... + {}^nC_r x^{n-r} y^r + ... + {}^nC_n x^0 y^n$ में

(r + 1) वाँ पद सामान्य पद कहलाता है। $T_{r+1} = {}^nC_{n-r+1} x^{r-1} y^{n-r+1}$

नोट : अन्त से r^{th} पद, शुरूआत से $(n - r + 2)^{th}$ पद के बराबर है अर्थात $^nC_{n-r+1} x^{r-1} y^{n-r+1}$

माध्य पर (s) (Middle term(s)) :

(a) यदि n सम हो, तो केवल एक मध्य पद होगा, जो $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ वाँ पद है।

(b) यदि n विषम हो, तो मध्य पद $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ वाँ पद होंगे।

$(a+b)^n, n \in N$ के प्रसार के महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद

(Numericially greatest term in the expansion of $(a+b)^n, n \in N$:

$(a + b)^n$ का द्विपद प्रसार इस प्रकार हे–

$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 + a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + ... + {}^nC_r a^{n-r} b^r + ... + {}^nC_n a^0 b^n$

यदि हम a और b के निश्चित मान दायें पक्ष में रखते है तो द्विपद प्रसार का प्रत्येक पद निश्चित मान रखता है। महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद महत्तम संख्यात्मक पद कहा जाता है।

माना T_r और T_{r+1} क्रमशः r th और (r + 1)th पद है।

$T_r = {}^nC_{r-1}\, a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$

$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r$

अब $\left|\frac{T_{r-1}}{T_r}\right| = \left|\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} \frac{a^{n-r}b^r}{a^{n-r+1}b^{r-1}}\right| = \frac{n-r+1}{r}.\left|\frac{b}{a}\right|$

माना कि $\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| \geq 1$ $\quad \left(\frac{n-r+1}{r}\right)\left|\frac{b}{a}\right| \geq 1$ $\quad \frac{n+1}{r} - 1 \geq \left|\frac{a}{b}\right|$

$$r \leq \frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$$

Case - I जब $\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक माना (m) है, तो

(i) $T_{r+1} > T_r$ जब $r < m$ (r = 1,2,3.....m m - 1)

अर्थात $T_2 > T_1$, $T_3 > T_2$,........., $T_m > T_{m-1}$

(ii) $T_{r+1} = T_r$ जब $r = m$

अर्थात् $T_{m+1} = T_m$

(iii) $T_{r+1} < T_r$ जब $r > m$ (r = m + 1, m + 2,......n)

अर्थात् $T_{m+2} < T_{m+1}$, $T_{m+3} < T_{m+2}$, ...$T_{n+1} < T_n$

निष्कर्ष: जब $\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक माना (m) है, तब T_m और T_{m+1} दोनों अधिकतम संख्यात्मक मान वाले पद हैं (दोनों पद मान में समान है।)

Case - II जब $\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक नहीं है (माना इसके पूर्णांक भाग का मान m हैं), तो

(i) $T_{r+1} > T_r$ जब $r < \frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ (r = 1, 2, 3, ..., m – 1, m)

अर्थात् $T_2 > T_1$, $T_3 > T_2$,........, $T_{m+1} > T_m$

(ii) $T_{r+1} < T_r$ जब $r < \frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ (r = 1m + 1, m + 2, ..., n)

अर्थात $T_{m+2} < T_{m+1}$, $T_{m+3} < T_{m+2}$, ..., $T_{n+1} < T_n$

निष्कर्ष : जब $\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक नहीं है और इसके पूर्णांक भाग का मान m है, तो T_{m+1} अधिकतम संख्यात्मक मान वाला पद होगा।

नोटः (i) किसी द्विपद प्रसार में, मध्य पद (पदों) महत्तम द्विपद गुणांक है।

$(a + b)^n$ के प्रसार में

n **महत्तम गुणांकों की संख्या** **महत्म गुणांक**

सम	1	$^nC_{n/2}$
विषम	2	$^nC_{(n-1)/2}$ और $^nC_{(n+1)/2}$ (इन दोनों गुणांकों के मान बराबर है)

(ii) महत्तम संख्यात्मक गुणांक वाला पद प्राप्त करने के लिए a = b = 1 रखते हैं और ऊपर किए हुए वार्तालाप को जारी राखते है।

परिणाम (Result): यदि $(\sqrt{A}+B)^n = I + f$ जहाँ I और n धनात्मक पूर्णांक है n विषम है और $0 < f < 1$ तब $(I+f)f = k^n$ जहाँ A –

$B^2 = k > 0$ और $\sqrt{A} - B < 1$ यदि n सम पूर्णांक है, तो $(I+f)(1-f) = k^n$

कुछ मानक प्रसार (Some standard expansions):

(i) प्रसार $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r = {}^nC_0 x^n y^0 + {}^nC_r x^{n-1} y^1 + \dots\dots\dots + {}^nC_r x^{n-r} y^r + \dots\dots\dots + {}^nC_n x^0 y^n$ को लेकर चलते है ....(i)

(ii) अब y – y रखते है, हमें $(x-y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (-1)^r x^{n-r} t^r = {}^nC_0 x^n y^0 - {}^nC_1 x^{n-1} y^1 + \dots\dots + {}^nC_r (-1)^r x^{n-r} y^r + \dots\dots + {}^nC_n (-1)^n x^0 y^n$ मिलता है। ....(ii)

(iii) (i) और (ii) को जोड़ने पर $(x+y)^n + (x-y)^n = 2[{}^nC_0 x^n y^0 + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots\dots]$

(iv) (i) में से (ii) को घटाने पर $(x+y)^n - (x-y)^n = 2[{}^nC_1 x^{n-1} y^1 + {}^nC_3 x^{n-3} y^3 + \dots\dots]$

द्विपद गुणांकों के गुण (Properties of Binomial Coefficients):

$(1+x)^n = C_0 + c_1 x + C_2 x^2 + \dots\dots + C_r x^r + \dots\dots\dots + C_r x^r + \dots\dots + C_n x^n$ ......(1)

जहाँ C_r, ^nC_r को निर्देशित करता है।

(1) $(1 + x)^n$ के प्रसार में द्विपद गुणांकों का योग 2^n होता है।

प्रमेय (1) में x = 1 रखने पर

$^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots\dots + {}^nC_n = 2^n$ ......(2)

या $\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r = 2^n$

(2) पुनः (1) में x = - 1 रखने पर –

$^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots\dots + (-1)^n\, {}^nC_n = 0$ ......(3)

या $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_r = 0$

(3) विषम स्थानों पर द्विपद गुणांकों का योग, सम स्थानों पर द्विपद गुणांकों के योग के बराबर है और प्रत्येक 2^{n-1} के बराबर होता है।

(2) और (3) से

$^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots\dots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \dots\dots = 2^{n-1}$

(4) दो क्रमागत द्विपद गुणांकों का योग $^nC_1 + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

$$\text{L.H.S.} = {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!(r-1!}\frac{(n+1)}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!r!} = {}^{n+1}C_r = \text{R.H.S.}$$

(5) दो क्रमागत द्विपद गुणांकों का अनुपात $\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$

(6) ${}^nC_r = \frac{n}{r}\,{}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n(n-1)}{r(r-1)}\,{}^{n-2}C_{r-2} = ...\frac{n(n-1)(n-2)........(n-(r-1))}{r(r-1)(r-2).......2.1}$

बहुपदीय प्रमेय (Multinomial Theorem):

हम जानते है कि द्विघात प्रमेय–

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r} y^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} x^{n-r} y^r$$

$n - r = r1$, $r = r_2$ रखने पर

$$(x+y)^n = \sum_{r_1+r_2=n} \frac{n!}{r_1!r_2!} x^{r_1}.y^{r_2}$$

$(x+y)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $r_1 + r_2 = n$ के अऋणात्मक पूर्णांक हलों की संख्या के बराबर है।
अर्थात् ${}^{n+2-1}C_{2-1} = {}^{n+1}C_1 = n + 1$ इसी प्रकार बहुपदीय प्रमेय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है–

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots xk)^n = \sum_{r_1+r_2+....+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!....r_k!} x_1^{r_1}.x_2^{r_2}......x_k^{r_k}$$

यहाँ $(x_1 + x_2 + \ldots.. + x_k)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $r_2 + r_2 + \ldots\ldots + r_k = n$ के अऋणात्क पूर्णांक हलों की संख्या के बराबर है। अर्थात् ${}^{m+k-1}C_{k-1}$

ऋणात्मक पूर्णांकों तथा भिन्नात्मक घातों के लिए द्विपद प्रमेय
(Binomial theorem for negative integer or fractional indices)

यदि $n \in R$ तब

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty.$$

Remarks

(i) यदि $|x| < 1$ हो, तो उपरोक्त प्रसार, पूर्ण संख्याओं के आलवा प्रत्येक परिमेय संख्या के लिए सत्य होता है।

(ii) घात n का मान ऋणात्मक पूर्णांक अथवा भिन्न होने पर, उपरोक्त प्रसार में पदों की संख्या अनन्त होती है और तब सामान्य पद के गुणांक को ^nC_r से नहीं दर्शाता जा सकता है।

(iii) प्रसार में पहला पद 1 होना चाहिए यदि घा n एक ऋणात्मक पूर्णांक या भिन्न है।

$$(x+y)^n = \begin{cases} x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n = x^n\left\{1 + n.\frac{y}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots\ldots\right\} \text{if } \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \\ y^n\left(1+\frac{x}{y}\right)^n = y^n\left\{1 + n.\frac{x}{y} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \ldots\ldots\right\} \text{if } \left|\frac{x}{y}\right| < 1 \end{cases}$$

(iv) $(1 + x)^n$ के प्रसार में सामान्य पद $T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$ है।

(v) जब 'n' पूर्ण संख्या के अलावा कोई परिमेय संख्या है तब $(1 + x)^n$ का अनुमानित मान $1 + nx$ है। (x^2 और उच्च घातों को नगण्य मानने पर)

(vi) कुछ महत्वपूर्ण प्रसार ($|x| < 1$)

a) $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.. + (-1)^r x^r + \ldots\ldots.. \infty$

(b) $(1 + x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.. + x^r + \ldots\ldots.. \infty$

(c) $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots.. + (-1)^r (r + 1) x^r + \ldots\ldots.. \infty$

(d) $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots.. + (r + 1)x^r + \ldots\ldots.. \infty$

Exercise – 1

1-A (बहुविकल्पीनय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. का (m + 1) वाँ पद

(A) x पर निर्भर नहीं है। (B) अचर है।
(C) अनुपात x/y और m पर निर्भर है। (D) इनमें से कोई नहीं

2. $(x + a)^{100} + (x - a)^{100}$ के प्रसार में पदों की संख्या है–

(A) 50 (B) 202 (C) 51 (D) इनमें से कोई नहीं

3. $\dfrac{18^3 + 7^3 + 3.18.7.25}{3^6 6.243.2 + 15.81.4 + 2.27.8 + 15.9.16 + 6.3.32 + 64}$ का मान है–

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $\left[\frac{1}{x^{8/3}} + x^2 \log_{10} x\right]^8$ के प्रसार में छठवां पद 5600 है, तो x =

(A) 10 (B) 8 (C) 11 (D) 9

5. $\left(3 - \sqrt{\frac{17}{4} + 3\sqrt{2}}\right)^{15}$ के प्रसार में 11 वाँ पद है–

(A) धनात्मक पूर्णाक (B) धनात्मक अपरिमेय संख्या (C) ऋणात्मक पूर्णांक (D) ऋणात्मक अपरिमेय संख्या

6. यदि $\left[a^{1/13} + \frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right]^n$ के प्रसार में द्वितीय पद $14a^{5/2}$ है, तो $\frac{^nC_3}{^nC_2}$ का मान है–

(A) 4 (B) 3 (C) 12 (D) 6

7. $(1-2x^3+3x^5)\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में x का गुणांक है– (A) 56 (B) 65 (C) 154 (D) 62

8. $(7^{1/3} + 11^{1/9})^{6561}$ के प्रसार में करणी चिन्ह (radical sign) से रहित पदों की संख्या है–
(A) 730 (B) 729 (C) 725 (D) 750

9. यदि $(x^{1/3} - x^{-1/2})^{15}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद 5m के बराबर है, जहाँ $m \in N$, तो m =
(A) 1100 (B) 1010 (C) 1001 (D) इनमें से कोई नहीं

10. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद है–
(A) -3 (B) 0 (C) 1 (D) 3

11. माना $(1 + x)^{2n}$ एवं $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक क्रमशः P एवं Q है, तो $\left(\frac{P+Q}{Q}\right)^5 =$
(A) 9 (B) 27 (C) 81 (D) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $k \in R$ और $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$ का मध्य पद 1120 है, तो k का मान होगा :
(A) 3 (B) 2 (C) -3 (D) -4

13. $(2 + 3x)^9$ के प्रसार में x =3/2 के लिए महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद है–
(A) $^9C_6 . 2^9 . (3/2)^{12}$ (B) $^9C_3 . 2^9 . (3/2)^6$ (C) $^9C_5 . 2^9 . (3/2)^{10}$ (D) $^9C_4 . 2^9 . (3/2)^8$

14. $(2x + 2y)^{34}$ के प्रसार में x = 3 एवं y = 2 के लिए अधिकतम संख्यात्मक मान वाला पद है–
(A) T_{21} (B) T_{22} (C) T_{23} (D) T_{24}

15. $(\sqrt{2}+1)^6$ से कम या बराबर महत्तम पूर्णांक है–
(A) 196 (B) 197 (C) 198 (D) 199

16. मानाकि $(5+2\sqrt{6})^n = p + f$, जहाँ $n \in N$ और $p \in N$ और $n < f < 1$, तो $f^2 - f + pf - p$ का मान है :
(A) एक प्राकृत संख्या (B) एक ऋणात्मक पूर्णांक
(C) एक अभाज्य संख्या (C) एक अपरिमेय संख्या

17. यदि 2^{2003} को 17 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल होगा–
(A) 1 (B) 2 (C) 8 (D) इनमें से कोई नहीं

18. संख्या 3^{400} के अंतिम दो अंक है :
(A) 81 (B) 43 (C) 29 (D) 01

19. 10! के मान में अंतिम तीन अंक है–
(A) 800 (B) 700 (C) 500 (D) 600

20. $\sum_{r=1}^{10} r.\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}}$ का मान बराबर है–
(A) 5 (2n -9) (B) 10 n (C) 9 (n - 4) (D) इनमें से कोई नहीं

21. व्यंजक $\left(\sum_{r=0}^{10} {^{10}C_r}\right)\left(\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{^{10}C_k}{2^k}\right)$ का मान है–
(A) 2^{10} (B) 2^{20} (C) 1 (D) 2^5

22. व्यंजक $^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {^{52-j}C_3}$ का मान बराबर है–
(A) $^{47}C_5$ (B) $^{52}C_5$ (C) $^{52}C_4$ (D) $^{49}C_4$

23. $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{^nC_r}{^nC_r + {^nC_{r+1}}} =$
(A) $\frac{n}{2}$ (B) $\frac{n+1}{2}$ (C) $(n+1)\frac{n}{2}$ (D) $\frac{n(n-1)}{2(n+1)}$

24. $\frac{^{11}C_0}{1}+\frac{^{11}C_1}{2}+\frac{^{11}C_2}{3}+.....+\frac{^{11}C_{10}}{11}=$

(A) $\frac{2^{11}-1}{11}$ (B) $\frac{2^{11}-1}{6}$ (C) $\frac{3^{11}-1}{11}$ (D) $\frac{3^{11}-1}{6}$

25. $\frac{C_0}{1.3}-\frac{C_1}{2.3}+\frac{C_2}{3.3}-\frac{C_3}{4.3}+......+(-1)^n\frac{C_n}{(n+1).3}$ का मान होगा –

(A) $\frac{3}{n+1}$ (B) $\frac{n+1}{3}$ (C) $\frac{1}{3(n+1)}$ (D) इनमें से कोई नहीं

26. $\binom{50}{0}\binom{50}{1}+\binom{50}{1}\binom{50}{2}+.......+\binom{50}{49}\binom{50}{49}$ का मान होगा, जहाँ $^nC_r=\binom{n}{r}$

(A) $\binom{100}{50}$ (B) $\binom{100}{51}$ (C) $\binom{50}{25}$ (D) $\binom{50}{25}^2$

27. यदि $|x| < 1$, तो $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^2$ के प्रसार में x^n का गुणांक है–

(A) n (B) n - 1 (C) n + 2 (D) n + 1

एक से अधिक विकल्प सही

28. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2, |x+<1$ में x^4 का गुणांक है–

(A) 4 (B) -4 (C) $10 + {}^4C_2$ (D) 16

29. यदि $(3x + 2)^{-1/2}$ का प्रसार x की बढ़ती हुई घातों के लिए वैध है तब x अंतराल में स्थित होगा।

(A) (0, 2/3) (B) (-3/2, 3/2)

(C) (-2/3, 2/3) (D) $(-\infty,-3/2)\cup(3/2,\infty)$

30. $(1 + x\ 2x^2)^{12}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक है–

(A) $^{12}C_3$ (B) $^{13}C_3$ (C) $^{14}C_4$ (D) $^{12}C_3 + 3\ {}^{13}C_3 + {}^{14}C_4$

31. $(1 - 2x + 5x^2)^n$ के प्रसार में गुणांकों का योगफल a है और $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में गुणांकों का योगफल b है, तो :

(A) a = b (B) $(x -)^2 + (x - b)^2 = 0$

(C) $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$ (D) ab = 1

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्न का प्रसार करो :

(i) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5, (x\neq 0)$ (ii) $\left(y^2+\frac{2}{y}\right)^4, (y\neq 0)$

2. $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}, x\neq 0$ के प्रसार के अंत से 7 वाँ पद ज्ञात करो।

3. $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{18}, x\neq 0$ के प्रसार में प्रारम्भ 7 वें पद और अंत से 7 वें पद का अनुपात 1 : 6 है। n का मान ज्ञात करो।

4. निम्न के प्रसार में मध्य पद ज्ञात करो–

(i) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^7$ (ii) $(1-2x+x^2)^n$

5. गुणांक का मान ज्ञात करो –

(i) x^6y^3 in $(x + y)^9$ (ii) a^5b^7 in $(a - 2b)^{12}$

6. सिद्ध रो कि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद का गुणांक $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार में मध्य पदों गुणांकों के योगफल के बराबर है।

7. प्रदर्शित करो कि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार मं मध्य पद $\frac{1.3.5......(2n-1)}{n!}$ है।

8. $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक और $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ के प्रसार में x^{-7} का गुणांक ज्ञात करो। यदि ये गुणांक परस्पर बराबर हो, तो 'a' एवं 'b' के बीच सम्बन्ध ज्ञात करो।

9. $(1 + x + 2x^3)\left(\frac{3}{3}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

10. $(3 - 5x)^{15}$ के प्रसार में $x = \frac{1}{5}$ के लिए महत्तम संख्यात्मक मान वाला(वाले) पद ज्ञात करो–

11. $(2x - 5)^6$ के प्रसार में वह पद ज्ञात करो जो रखता है (i) महत्तम द्विपद गुणांक (ii) महत्त्म संख्यात्मक गुणांक (iii) सबसे बड़ा बीजगणितीय गुणांक (iv) सबसे छोटा बीजगणितीय गुणांक

12. यदि $\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\right)^n$ के प्रसार में 9 वाँ पद संख्यात्मक रूप से महत्त्म गुणांक वाला पद हो, तो n का मान ज्ञात करो जबकि $n \in N$.

13. (i) शेष ज्ञात करो, जब 7^{98} को 5 से विभाजित किया जाए।
(ii) द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि $6^n - 5n$ को 25 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल सदैव 1 होता है।
(iii) $(27)^{27}$ का अंतिम अंक, अंतिम दो अंक व अंतिम तीन अंक ज्ञात करो।

14. यदि $\left(3\sqrt{3} + 5\right)^n = p + f$, जहाँ p पूर्णांक है और f भिन्नात्मक भाग है, तो $\left(3\sqrt{3} - 5\right)^n, n \in N$. का मान ज्ञात करो।

15. $(99^{50} + 100^{50})$ तथा $(101)^{50}$ में से कौनसा बड़ा है ?

यदि $(1 + x)^n$, $n \in N$ के प्रसार में $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ द्विपद गुणांक है, तो सिद्ध करो : (प्रश्न संख्या 17 से 20 तक)

17. $\frac{C_1}{C_0} + 2.\frac{C_2}{C_1} + 3\frac{C_3}{C_2} + \ldots.. + n\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

18. $(C_0 + C_1)(C_1 + C_2)(C_2 + C_3)(C_3 + C_4) \ldots..(C_{n-1} + C_n) = \frac{C_0 C_1 C_2 \ldots.. C_{n-1}(n+1)^n}{n!}$

19. $C_0 + 2C_1 + 3C_2 - 4C_3 + \ldots.. + (-1)^n (n+1) C_n = 0$

20. $2.C_0 + \frac{2^2.C_1}{2} + \frac{2^3.C_2}{3} + \frac{2^4.C_3}{4} + \ldots\ldots \frac{2^{n+1}.C_n}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$

21. यदि $(1 + x)^n = C_0 + C_1 x + C2 x^2 + \ldots. + C_n x^n$, सिद्ध करो।
(i) $C_0 C_3 + C_1 C_4 + \ldots\ldots + C_{n-3} C_n = \frac{(2n)!}{(n+3)!(n-3)!}$
(ii) $C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + \ldots\ldots + C_{n-r} C_n = \frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$
(iii) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \ldots\ldots + (-1)^n C_n^2 = 0$ or $(-1)^{n/2} C_{n/2}$ according as n is odd or even
$C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \ldots\ldots + (-1)^n C_n^2 = 0$ या $(-1)^{n/2} C_{n/2}$ यदि n विषम या सम है।

22. सिद्ध करो ${}^nC_r + {}^{n-1}C_r + {}^{n-2}C_r + \ldots\ldots + {}^rC_r = {}^{n+1}C_{r+1}$

23. $C(1 - 2x)^{-5/2}$ के प्रसार में x^6 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

24. यदि 'x' का मान इतना अल्प है कि x^2 और 'x' की उच्च घातों को नगण्य माना जा सकता है तो प्रदर्शित कीजिए कि $\frac{\left(1 + \frac{3}{4}x\right)^{-4}(16 - 3x)^{1/2}}{(8 + x)^{2/3}}$ का मान लगभग $1 - \frac{305}{96}x$ है।

25. $(1 - 2x + x^3)^5$ में x^7 का गुणांक है।

26. (i) $(bc + ca + ab)^8$ के प्रसार में $a^5b^4c^7$ का गुणांक ज्ञात करो।
(ii) $(9x^2 + x - 8)^6$ के प्रसार में x की विषम घातों के गुणांकों का योगफल है।

Exercise – 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$ और $b_r = 1 + \frac{a_r}{a - 1}$ और $\prod_{r=1}^{n} b_r = \frac{(101)^{100}}{100!}$ तो n बराबर है–

(A) 99 (B) 100 (C) 101 (D) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $^{39}C_{3r-1} - ^{39}C_{r^2} = ^{39}C_{r^2-1} - ^{39}C_{3r}$ को संतुष्ट करने वाले 'r' के मानों की संख्या है –
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. $^{18}C_{r-2} + 2.^{18}C_{r-1} + ^{18}C_r \geq ^{20}C_{13}$ को संतुष्ट करने वाले r के मानों का समुच्चय रखता है –
(A) 4 अवयव (B) 5 अवयव (C) 7 अवयव (D) 10 अवयव

4. $\sum_{m=0}^{100} {^{100}C_m} (x-3)^{100-m}.2^m$ के प्रसार में x^{52} का गुणांक है–
(A) $^{100}C_{47}$ (B) $^{100}C_{48}$ (C) $-^{100}C_{52}$ (D) $-^{100}C_{100}$

5. योगफल $\frac{1}{1!n-1)!} + \frac{1}{2!n-2)!} + ... \frac{1}{n!n-1)!}$ बराबर है :
(A) $\frac{1}{n!}(2^{2-1} - 1)$ (B) $\frac{1}{n!}(2^n - 1)$ (C) $\frac{1}{n!}(2^{n-1} - 1)$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. $(1 + x)^{21} + (1 + x)^{22} + ...+ (1 + x)^{30}$ के प्रसार में x^5 गुणांक है :
(A) $^{51}C_5$ (B) $^9C_5$ (C) $^{31}C_6 - ^{21}C_6$ (D) $^{30}C_5 + ^{20}C_5$

7. यदि $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1 + a_2x^2 +...... + a_{15}x^{15}$ हो, तो $a_{10} =$
(A) 99 (B) 101 (C) 100 (D) 110

8. $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n, n \in N$ के प्रसार में x^5 और x^{10} के गुणांकों का योग शून्य हो, तो n है –
(A) 25 (B) 20 (C) 15 (D) इनमें से कोई नहीं

9. $\left(1 + 2\sqrt{x}\right)^{40}$ के प्रसार में x की सभी पूर्णांक घातों के गुणांकों का योगफल है –
(A) $3^{40} + 1$ (B) $3^{40} - 1$ (C) $\frac{1}{2}(3^{40} - 1)$ (D) $\frac{1}{2}(3^{40} + 1)$

10. $\left(\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{x-1}{x - x^{\frac{1}{2}}}\right)$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद का मान है –
(A) 70 (B) 112 (C) 105 (D) 210

11. $(x + 3)^n + (x + 3)^{n-1}(x + 2) + (x + 3)^{n-2}(x + 2)^2 + ...+ (x + 2)^n$ के प्रसार में x^{n-1} का गुणांक है –
(A) $^{n+1}C_2(3)$ (B) $^{n-1}C_2(5)$ (C) $^{n+1}C_2(5)$ (D) $^nC_2(5)$

12. माना $f(n) = 10^n + 3.4^{n+2} + 5, n \in N$ तब पूर्णांक का अधिकतम मान जो f(n) को n के प्रत्येक मान के लिए विभाजित करता है – (A) 27 (B) 9 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

13. यदि {x}, 'x' के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है, तो $\left\{\frac{3^{1001}}{82}\right\} =$
(A) 9/82 (B) 81/2 (C) 3/82 (D) 1/82

14. योगफल $\sum_{r=0}^{n} (r+1)C_r^2$ बराबर है–
(A) $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ (B) $\frac{(n+2)(2n+1)!}{n!(n-1)!}$ (C) $\frac{(n+2)(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ (D) $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n+1)!}$

15. यदि $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{^nC_r}$ हो तो $\sum_{r=0}^{n} \frac{n-2r}{^nC_r}$ का मान होगा –
(A) $\frac{n}{2}a_n$ (B) $\frac{1}{4}a_n$ (C) na_n (D) 0

16. श्रेणी $\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1}.{^rC_r}(a-r)$ का योगफल बराबर है–
(A) $n . 2^{n-1} + a$ (B) 0 (C) a (D) इनमें से कोई नहीं

17. $3.^nC_0 - 8.^nC_1 + 13.^nC_2 - 18.^nC_3 +.....$ में (n+1) पदों तक योगफल है–

(A) शून्य (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

18. $\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)^n, n\in N$ के प्रसार में पदों की संख्या है –

(A) 2n (B) 3n (C) 2n +1 (D) 3n + 1

19. यदि $(1 + x + 2x^2)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{40}x^{40}$ हो, तो $a_0 + a_2 + a_4.... + a_{38}$ बराबर है–

(A) $+2^{19}(2^{30}+1)$ (B) $2^{19}(2^{20}-1)$ (C) $2^{20}(2^{19}-1)$ (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

20. यदि $(1 + x)^n$ के प्रसार में a विषम पदों का और b सम पदों का योग है, तब $(1 - x^2) =$

(A) $a^2 - b^2$ (B) $a^2 + b^2$ (C) $b^2 - a^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. $\left(\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)^{20}$ के प्रसार में

(A) अपरिमेय पदों की संख्या 19 है। (B) मध्य पद अपरिमेय है।
(C) परिमेय पदों की संख्या 2 है। (D) 9 वाँ पद परिमेय है।

22. यदि $(9+\sqrt{80})^n = I + f$ जहाँ I, n पूर्णांक हैं और $0 < f < 1$, तो –

(A) I एक विषम पूर्णांक है। (B) I एक सम पूर्णांक है। (C) $(I + f)(1 - f) = 1$ (D) $1 - f = (9-\sqrt{80})^n$

23. $7^9 + 9^7$ विभाजित है –

(A) 16 से (B) 24 से (C) 64 से (D) 72 से

24. यदि $(1 + 2x + 3x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$ हो, तो

(A) $a_1 = 20$ (B) $a_2 = 210$
(C) $a_4 = 8085$ (D) $a_{20} = 2^2.3^7.7$

25. $(x + y + z)^{25}$ के प्रसार में

(A) प्रत्येक पद $^{25}C_r.\ ^rC_k.\ X^{25-r}.\ y^{r-k}.\ z^k$ रूप में होगा।
(B) $x^8y^9z^9$ का गुणांक 0 है।
(C) पदों की संख्या 325 है।
(D) इनमें से कोई नहीं

2-B (विषत्मक प्रश्न)

1. x के उन मानों का समुच्चय ज्ञात करो जिनके लिए $\left(5^{\frac{2}{5}\log\sqrt{4^x+44}}+\frac{1}{5^{\log_5\sqrt[3]{2^{x-1}+7}}}\right)^8$ के प्रसार में चौथा पद 336 है।

2. प्रदर्शित कीजिए $\sqrt{3} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{3}{6}+\frac{1}{3}.\frac{3}{6}.\frac{5}{9}+\frac{1}{3}.\frac{3}{6}.\frac{5}{9}.\frac{7}{12}+......$

3. यदि $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r.{}^nC_r\left[\frac{1}{2^r}+\frac{3^r}{2^{2r}}+\frac{7^r}{2^{3r}}+.....m\right]=k\left(1-\frac{1}{2^{mn}}\right)$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

4. व्यंजक $(1 + x)^{1000} + 2x. (1 + x)^{999} + 3x^2 (1 + x)^{998} + ...+ 1001\ x^{1000}$ में x^{50} का गुणांक ज्ञात करो।

5. यदि $s_n = 1 + a + q^2 + ... + q^n$ तथा $S_n = 1+\frac{q+1}{2}\left(\frac{q+1}{2}\right)^2+.....+\left(\frac{q+1}{2}\right)^n, q\neq 1$ हो, तो सिद्ध करो कि $^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2.s_1 + {}^{n+1}C_3.s_2 + ... + {}^{n+1}C_{n+1}.s_n = 2^n.\ S_n$.

6. प्रदर्शित करो कि यदि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में अधिकतम पद का गुणांक भी अधिकतम है, तो 'x' का मान $\frac{n}{n+1}$ और $\frac{n+1}{n}$ के बीच में है।

7. यदि $(1 + x + x^2 + ... + x^p)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{np}.\ x^{np}$ हो, तो $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + np.\ a_{np}$ का मान ज्ञात करो।

8. यदि $(1 + x)^{15} = C_0 + C_1.\ x + C_2.\ x^2 + ... + C_{15}.\ x^{15}$ हो, तो $C_2 + 2C_3 + {}^3C_4 + ... + {}^{14}C_{15}$ का मान ज्ञात करो।

9. सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{2}{}^nC_1-\frac{2}{3}{}^nC_2+\frac{3}{4}{}^nC_3-\frac{4}{5}{}^nC_4+.....+\frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}.{}^nC_{nl}=\frac{1}{n+1}$

10. यदि $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r x^r$ हो, तो सिद्ध करो कि ;

$$\frac{2^2.C_0}{1.2} + \frac{2^3.C_1}{2.3} + \frac{2^4.C_2}{3.4} + ... + \frac{2^{n+2}.C_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{(n+1)(n+2)}$$

11. सिद्ध करो कि $({}^{2n}C_1)^2 + .2({}^{2n}C_2)^2 + 3.({}^{2n}C_3)^2 + ... + 2n.({}^{2n}C_{2n})^2 = \frac{(4n-1)!}{\{(2n-1)!\}^2}$

12. यदि n धनात्मक पूर्णांक है और $C_k = {}^nC_k$ हो, तो $\sum_{k=1}^{n} k^3 \left(\frac{C_k}{C_{k-1}}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. सिद्ध करो कि $\sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^nC_r p^r q^{n-r} = npq + n^2p^2$ होगा जबकि $p + q = 1$ हो।

14. $\sum_{m=p}^{n} {}^nC_m . {}^mC_p$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. सिद्ध कीजिए कि : $(n-1)^2 . C_1 + (n-3)^2 . C_3 + (n-5)^2 . C_5 + ... = n(n+1)2^{n-3}$

16. यदि $(1 + x)^n + C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $m \geq 2$ के लिए $C_0 - C_1 + C_2 - ...... + (-1)^{m-1}C_{m-1} = (-1)^{m-1}\ {}^{n-1}C_{m-1}$.

17. सिद्ध करो कि यदि 'p' , 2 से बड़ी एक अभाज्य संख्या है, तो अंतर $\left[(2+\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1}$,p से विभाजित होगाए जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है।

18. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{k=1}^{3n} {}^{6n}C_{2k-1}(-3)^k = 0.$

19. यदि $a_0, a_1, a_2,.....,$ $(1 + x + x^2)^n$ के प्रसार में x की बढ़ती हुई घातों के गुणांक है, तो सिद्ध करो कि :

(i) $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - ..... = 0$

(ii) $a_0a_2 - a_1a_3 + a_2a_4 - .....+ a_{2n-2}\,a_{2n} = a_{n+1}$

(iii) $E_1 = E_2 = E_3 = 3^{n-1}$; जहाँ $E_1 = a_0 - a_3 + a_6 + ...$; $E_2 = a_1 - a_4 + a_7 + ...$; एवं $E_3 = a_2 - a_5 + a_8 + ...$

20. सिद्ध करो ${}^nC_r + 2\ {}^{n+1}C_r + 3\ {}^{n+2}C_r + ... + (n + 1)\ {}^{2n}C_r = {}^nC_{r+2} + (n + 1)\ {}^{2n+1}C_{r+1} - {}^{2n+1}C_{r+2}$

21. यदि $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...+ C_nx^n$, तब दर्शाओं कि दो C_i's के एक साथ लेने पर उनके गुणनफलनों का योग जोकि $\underset{0 \leq i < j \leq n}{\Sigma\Sigma}\ C_i\ C_j$ द्वारा प्रदर्शित होता है $2^{2n-1} - \frac{2n!}{2(n!)^2}$ के बराबर है।

Exercise - 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1.

स्तम्भ I		स्तम्भ II	
(A)	यदि $(1 + x)^{7/2}$ के प्रसार में (r + 1) वाँ पद प्रथम ऋणात्मक पद है, तो r का मान है– (जहाँ $|x| < 1$)	(p)	2 से विभाजित है।
(B)	$(y^2 + 1/y)^5$ के प्रसार में y का गुणांक है–	(q)	5 से विभाजित है
(C)	${}^nC_r$, $(1 < r < n)$, n से विभाजित होगा यदि n सदैव है	(r)	10 से विभाजित है
(D)	व्यंजक $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ अनन्त पदों तक$)^{1/2}$ में x^4 का गुणांक $c, (c \in N)$ है, तो c + 1 है – (जहाँ $|x| < 1$)	(s)	एक अभाज्य संख्या

2.

स्तम्भ I		स्तम्भ II	
(A)	यदि $x(7+4\sqrt{3})^{2n} = [x] + f$ हो, तो $x(1 - f) =$	(p)	6

(B)	यदि $(x + a)^n$ के प्रसार में द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ पद क्रमशः 240, 720 और 1080 है, तब n बराबर है।	(q)	1
(C)	${}^4C_0{}^4C_4 - {}^4C_1{}^4C_3 + {}^4C_2{}^4C_2 - {}^4C_3{}^4C_1 + {}^4C_4{}^4C_0$ का मान है –	(r)	2
(D)	यदि x तुलनात्मक रूप में y से बहुत बड़ा है, तब $\sqrt{\frac{x}{x+y}}\sqrt{\frac{x}{x-y}} = 1 + \frac{y^2}{kx^2}$ में x का मान है।	(s)	5

3-B (कथन / कारण)

3. **कथन –1:** $\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^m$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद $\frac{(2m)!}{(m!)^2}$ है

कथन – 2: $(1 + x)^n$ के प्रसार में x^b का गुणांक ${}^nC_b$ है।
(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

4. **कथन–1** : $\left(\sqrt{2} - 1\right)$ की कोई धनात्मक पूर्णांकी घात किसी प्राकृत संख्या N >1 के लिए $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$ की तरह व्यक्त की जा सकती है।

कथन–2 : $\sqrt{2} - 1$ की कोई भी धनात्मक पूर्णांकी घात $A + B\sqrt{2}$ की तरह व्यक्त की जा सकती है, जहाँ A और B पूर्णांक है।
(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है। (D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

5. **कथन–1:** यदि n विषम अभाज्य संख्या है, तो $\left[\left(\sqrt{5} + 2\right)^n\right] - 2^{n+1}$,20n से भाज्य है। जहाँ [.] महत्तम पूर्णांकी फलन है।

कथन–2 : यदि n अभाज्य है, तो ${}^nC_1, {}^nC_2, \ldots\ldots {}^nC_{n-1}$, n
(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

6. **कथन–1** : यदि n सम है, तो ${}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_3 + {}^{2n}C_5 + \ldots\ldots\ldots + {}^{2n}C_{n-1} = 2^{2n-1}$.

कथन–2: ${}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_3 + {}^{2n}C_5 + \ldots\ldots\ldots + {}^{2n}C_{2n-1} = 2^{2-1}$.
(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. **अनुच्छेद**
यदि एक गुणनफल P दिया जाता है $P = (x + a_1)(x + a_2) \ldots\ldots (x + a_n$

और यदि $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, S_2 = \sum\sum_{i<j} a_i.a_j, S_3 = \sum\sum\sum_{i<j<k} a_i.a_j.a_k$ और अनन्त तक, तो यह सिद्ध करो कि $P = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots.. + S_n$.

7.1 व्यंजक $(2 + x)^2(3 + x)^3(4 + x)^4$ में x^8 का गुणांक है–
(A) 26 (B) 27 (C) 28 (D) 29

7.2 व्यंजक $(x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - 3) \ldots\ldots (x^{20} - 20)$ में x^{203} का गुणांक है–
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 15

7.3 व्यंजक $(x - 1)(x - 2) \ldots\ldots (x - 100)$ में x^{98} का गुणांक है–

(A) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$
(B) $(1 + 2 + 3 + ... + 100)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2)$
(C) $\frac{1}{2}[(1+2+3+.....+100)^2 - (1^2+2^2+3^2+......+100^2)]$
(D) इनमें से कोई नहीं

8. **अनुच्छेद**

हम जानते है कि $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ... + C_nx^n$ के यदि ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ द्विपद गुणांक है, तो द्विपद गुणांक के मध्य x = 1, -1, $i, \omega\left(\text{where } i = \sqrt{-1}, \omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ रखने पर, सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

8.1 ${}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - {}^nC_6 + ...$ का मान है

(A) $2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{2}$ (B) $2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{2}$ (C) $2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$ (D) $2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$

8.2 व्यंजक $({}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - {}^nC_6 + ...)^2 + ({}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5.....)^2$ का मान है –

(A) 2^{2n} (B) 2^n (C) 2^{n^2} (D) इनमें से कोई नहीं

8.3 ${}^nC_0 + {}^nC_3 + {}^nC_6 + ...$ का मान है–

(A) $\frac{2^n}{3}$ (B) $\frac{1}{3}\left(2^n + \cos\frac{n\pi}{3}\right)$ (C) $\frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$ (D) $\frac{1}{3}\left(2^n + 2\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ${}^{m+n}C_n$ है।

10. $(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3) ...... (1 + x + x^2 + ... + x^{100})$ को यदि x की बढ़ती हुई घातों के क्रम में लिखा जाता है, तो x की अधिकतम घात 5000 होगी –

11. $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ से बड़ा पूर्णांक हमेशा 2^{n+1} से विभाजित है–**12.** 3^{50} की अंतिम 3 अंक 249 होंगे।

13. यदि $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$, तो $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = \frac{3^n - 1}{2}$

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. $(1 + x)^{10}$ के प्रसार में $(2m + 1)^{th}$ एवं $(4m + 5)^{th}$ पदों के गुणांक समान है, तो m का मान ________ है।

15. यदि $(1 + x)^{10} = a_0\, a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10}x^{10}$ हो, तो $(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9)^2$ का मान ________ है।

16. a का वह धनात्मक मान _______ है, जिसके लिए $\left(x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ के प्रसार में x^{15} का गुणांक x^5 के गुणांक के बराबर है।

17. यदि $\sum_{k=1}^{n-r} {}^{n-k}C_r = {}^xC_y$ हो, तो x = ________ और y = _______

18. यदि विपरीत व्यंजक $P_k(x)$ इस तरह से परिभाषित है कि $P_1(x) = (x-2)^2$, $P_2(x) = ((x-2)^2 - 2)^2$ $P_3(x) = ((x-2)^2 - 2)^2 - 2)^2$ ..... (सामान्य तौर पर $P_k(x) = (P_{k-1}(x) - 2)^2$ तो $P_k(x)$ में नियत पद _______ है।

Exercise - 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2005

1. $\binom{30}{0}\binom{30}{10} - \binom{30}{1}\binom{30}{11} + \binom{30}{2}\binom{30}{12} ..... + \binom{30}{20}\binom{30}{30}$ का मान है–

(A) $\binom{60}{20}$ (B) $\binom{30}{10}$ (C) $\binom{30}{15}$ (D) इनमें से कोई नहीं

IIT - JEE - 2004

2. यदि ${}^{(n-1)}C_r = (k^2 - 3)\,{}^nC_{r+1}$ हो, तो $k \in$

(A) $(2,\infty)$ (B) $(-\infty,-2)$ (C) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ (D) $(\sqrt{3},2]$

IIT-JEE-2003

3. $(1+t^2)^{12}(1+t^{12})(1+t^{24})$ में t^{24} का गुणांक है :

(A) ${}^{12}C_6+3$ (B) ${}^{12}C_6+1$ (C) ${}^{12}C_6$ (D) ${}^{12}C_6+2$

4. सिद्ध कीजिए कि $2^k\binom{n}{0}\binom{n}{k}-2^{k-1}\binom{n}{1}\binom{n-2}{k-2}+2^{k-2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-.....(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=\binom{n}{0}$.

IIT - JEE - 2002

5. योगफल $\sum_{i=0}^{m}\binom{10}{i}\binom{20}{m-i}$, (जहाँ $\binom{p}{q}=0$, यदि $p<q$) अधिकतम होने के लिय 'm' है :

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

IIT-JEE-2001

6. $(a-b)^n$, $n \ge 5$, के प्रसार में 5 वें और 6 वें पदों का योगफल शून्य है, तो a/b बराबर है :

(A) $\frac{n-5}{6}$ (B) $\frac{n-4}{5}$ (C) $\frac{5}{n-4}$ (D) $\frac{6}{n-5}$

IIT-JEE-2000

7. $2 \le r \le n$ के लिए $\binom{n}{r}+2\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r-2}=$

(A) $\binom{n+1}{r-1}$ (B) $2\binom{n+1}{r+1}$ (C) $2\binom{n+2}{r}$ (D) $\binom{n+2}{r}$

8. किसी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए (जबकि $n \ge m$), मानाकि $\binom{n}{m}={}^nC_m$. सिद्ध कीजिए कि–

$\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m}+...+\binom{m}{m}=\binom{n+1}{m+2}$. अतः सिद्ध कीजिए कि

$\binom{n}{m}+2\binom{n-1}{m}+3\binom{n-2}{m}+...+(n-3+1\binom{m}{m}=\binom{n+2}{m+2}$.

IIT-JEE-1999

9. यदि $(1+x)^m(1-x)^n$ के प्रसार में x और x^2 के गुणांक क्रमशः 3 और -6 है, तो m का मान है–

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 24

IIT-JEE-1998

10. यदि $a_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{{}^nC_r}$ हो, तो $\sum_{r=0}^{n}\frac{r}{{}^nC_r}$ बराबर है–

(A) $(n-1)\,a_n$ (B) na_n (C) $\frac{1}{2}na_n$ (D) इनमें से कोई नहीं

11. यदि n एक विषम प्राकृत संख्या है, तो $\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{{}^nC_r}$ बराबर –

(A) 0 (B) $\frac{1}{n}$ (C) $\frac{n}{2^n}$ (D) इनमें से से कोई नहीं

IIT-JEE-1997

12. $(\sqrt{2}+3^{1/5})^{10}$ के प्रसार में परिमेय पदों का योगफल _______ है।

13. सिद्ध कीजिए कि $\frac{3!}{2(n+3)}=\sum_{r=0}^{n}(1-)^r\left(\frac{{}^nC_r}{{}^{r+3}C_r}\right)$

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

14. $(a-b)^n$ के द्विपद प्रसार में $n \geq 5, 5^{th}$ और 6^{th} पदों का योग शून्य है, तो $\frac{a}{b}$ बराबर है–

(A) $\frac{5}{n-4}$ (B) $\frac{6}{n-5}$ (C) $\frac{n-5}{6}$ (D) $\frac{n-4}{5}$

15. श्रेणी $^{20}C_0 - {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 - {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C^{10}$ का योग है– (A) $-{}^{20}C_{10}$ (B) $\frac{1}{2}\,{}^{20}C_{10}$ (C) 0 (D) $^{20}C_{10}$

16. फलन $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ के प्रसार में x की घात $a_0 + a_1x + a_2a^2 + a_3a^3 + ...$ है, तो a_n है–

(A) $\frac{a^n - b^n}{b-a}$ (B) $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{b-a}$ (C) $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$ (D) $\frac{b^n - a^n}{b-a}$

17. प्राकृत संख्याओं m, n के लिए, यदि $(1-y)^m(1+y)^n = 1 + a_1y + a_2y^2 + ...$ और $a_1 = a_2 = 10$ तो (m, n) है–

(A) (35, 20) (B) (45, 35) (C) (35, 45) (D) (20, 45)

18. यदि $(1 + y)^m$ के द्विपद प्रसार में r th, (r + 1)th और (r + 2)th पदों के गुणांक समान्तर श्रेढ़ी में है, तो m और r समीकरण को संतुष्ट करते है–

(A) $m^2 - m(4r - 1) + 4r^2 + 2 = 0$. (B) $m^2 - m(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$.
(C) $m^2 - m(4r + 1) + 4r^2 + 2 = 0$. (D) $m^2 - m(4r - 1) + 4r^2 - 2 = 0$.

19. $^{50}C_4 + \sum_{r=1}^{6} {}^{56-r}C_3$ का मान है– (A) $^{56}C_4$ (B) $^{56}C_3$ (C) $^{55}C_3$ (D) $^{55}C_4$

20. $\left[ax^2 + \left(\frac{1}{bx}\right)\right]^{11}$ में x^7 का गुणांक $\left[ax - \left(\frac{1}{bx^2}\right)\right]^{11}$ में x^{-7} के गुणांक बराबर है, तो a और b सम्बन्ध को संतुष्ट करते है–

(A) ab = 1 (B) $\frac{a}{b} = 1$ (C) a + b = 1. (D) a – b = 1.

21. यदि x इतीना छोटा है कि x^3 और x की उच्च घात नगण्य है, तो $\frac{(1+x)^{3/2} - \left(1+\frac{1}{2}x\right)^3}{(1-x)^{1/2}}$ लगभग हो सकता है–

(A) $\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2$ (B) $-\frac{3}{8}x^2$ (C) $3x + \frac{3}{8}x^2$ (D) $1 - \frac{3}{8}x^2$

22. द्विपद प्रमेय में $(1+\alpha x)^4$ और $(1-\alpha x)^6$ के प्रसार में x की घात में मध्य पद का गुणांक समान है, यदि α बराबर है–

(A) $-\frac{5}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $-\frac{3}{10}$ (D) $\frac{3}{5}$

23. $(1 +)\ (1 - x)^n$ के प्रसार में x^n का गुणांक है–

(A) (n - 1) (B) $(-1)^n (1 - n)$ (C) $(-1)^{n-1} (n-1)^2$ (D) $(-1)^{n-1}\, n$

24. यदि $s_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{^nC_r}$ और $t_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{^nC_r}$ तो $\frac{t_n}{s_n}$ बराबर है–

(A) $\frac{n}{2}$ (B) $\frac{n}{2} - 1$ (C) n - 1 (D) $\frac{2n-1}{2}$

25. यदि ^nC_r, n वस्तुओं में से एक समय में r के चयन करने के तरीकों की संख्या है, तो व्यंजक $^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1} + 2 \times {}^nC_r$ बराबर है–

(A) $^{n+2}C_r$ (B) $^{n+2}C_{r+1}$ (C) $^{n+1}C_r$ (D) $^{n+1}C_{r+1}$

26. $\left(\sqrt{3} + \sqrt[8]{5}\right)^{256}$ के प्रसार में प्रर्णाक पदों की संख्या है–

(A) 32 (B) 33 (C) 34 (D) 35

27. यदि x धनात्मक है, $(1+x)^{\frac{27}{5}}$ के प्रसार में प्रथम ऋणात्मक पद है–

(A) 7 वाँ पद (B) 5 वाँ पद (C) 8 वाँ पद (D) 6 वाँ पद

28. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$ के प्रसार में x^6 का गुणांक है–
(A) 16 (B) 10 (C) 15 (D) इनमें से कोई नहीं

29. $\left[\sqrt{(x/3)}+\sqrt{3}/x^2\right]^{10}$ में x को स्वतंत्र पद है–
(A) 6 (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

30. $(1+x)^{30}$ के प्रसार में x के विषम घात के गुणांकों का योग है–
(A) 0 (B) 2^{31} (C) 2^{30} (D) 2^{29}

31. $(1+t^2)^{12}(1+t^{12})(1+t^{24})$ में t^{24} का गुणांक है–
(A) ${}^{12}C_6+3$ (B) ${}^{12}C_6+1$ (C) ${}^{12}C_6$ (D) ${}^{12}C_6+2$

32. $loe_e(1+3X+2X^2)$ में x^4 का गुणांक है–
(A) 15/4 (B) 17/4 (C) -17/4 (D) इनमें से कोई नहीं

33. यदि |x| महत्तम पूर्णांक जो x से कम या बराबर है, को निर्देशित करता है और G = R - [R] जहाँ $R=\left(5\sqrt{5}+11\right)^{2n+1}$ तो RF बराबर है–
(A) 4^{2n+1} (B) 4^{2n} (C) 4^{2n-1} (D) इनमें से कोई नहीं

34. $(3^{1/2}+2^{1/2})^{500}$ के प्रसार में पूर्णांकी पदों की संख्या है–
(A) 128 (B) 129 (C) 251 (D) 512

35. यदि $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{{}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+....{}^nC_n}{{}^nP_n}\right)$, तो S =
(A) 2e (B) 2e - 1 (C) 2e + 1 (D) इनमें से कोई नहीं

36. यदि $C_0, C_1, C_2, ...C_n$ द्विपद प्रसार $(1+x)^n$ के गुणांकों को निर्देशित करता है, तो $C_1+3c_3+5C_5+....$न है –
(A) $(n+1)2^n$ (B) $n\,2^{n-1}$ (C) $n2^{n-2}$ (D) $(n+2)\,2^{n-1}$

Answers

EXERCISE # 1 –A

1. C **2.** C **3.** A **4.** A **5.** B **6.** A **7.** C
8. A **9.** C **10.** B **11.** D **12.** B **13.** A **14.** B
15. B **16.** B **17.** C **18.** D **19.** A **20.** A **21.** C
22. C **23.** A **24.** B **25.** C **26.** B **27.** D
28. CD **29.** AC **30.** D **31.** ABC

EXERCISE # 1-B

1. (I) $\left(\frac{2}{x}\right)^2-5\left(\frac{2}{x}\right)^3+10\left(\frac{2}{x}\right)$ $-10\left(\frac{x}{2}\right)+5\left(\frac{x}{2}\right)^3-\left(\frac{x}{2}\right)^5$

(ii) $y^8+8y^5+24y^2+\frac{32}{y}+\frac{16}{y^4}$

2. ${}^{18}C_6$ **3.** n = 9

4. (i) $-\frac{35x}{y},\frac{35y}{x}$ (ii) $(-1)^n\frac{(2n)!}{n!n!}x^n$

5. (i) ${}^9C_3$ (ii) $-2^7\,.\,{}^{12}C_7$

8. ${}^{11}C_5\frac{a^6}{b^5},{}^{11}C_6\frac{a^5}{b^6},ab=1$ **9.** $\frac{17}{54}$

10. $T_4=-455\times3^{12}$ and $T_5=455\times3^{12}$

11. (i) T_4 (ii) T_5, T_6 (iii) T_5 (iv) T_6

12. n = 12 **13.** (i) 4 (ii) 3, 03, 803

14. 1 – f, if n is even and f, if n is odd

16. 101^{50} **23.** $\frac{15015}{16}$ **25.** 20

26. (i) 280 (ii) 2^5

EXERCISE # 2 –A

1. B **2.** B **3.** C **4.** B **5.** C **6.** C **7.** B **8.** C **9.** D **10.** D **11.** C **12.** B **13.** C **14.** A **15.** D **16.** C **17.** A **18.** C **19.** B **20.** AC **21.** ABCD **22.** ACD **23.** AC **24.** ABC **25.** AB

EXERCISE # 2 – B

1. x = 0 or 1 **3.** $\frac{1}{2^n - 1}$ **4.** $^{1002}C_{50}$

7. $\frac{np}{2}(p+1)^n$ **8.** 212993 **12.** $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

14. $2^{n-p}.\ ^nC_p$.

EXERCISE # 3

1. (A) → (q,s), (B) → (pq,r,) (C) → (p), (D) → (s)

2. (A) → (q), (B) → (s), (C) → (p), (D) → (r)

3. A **4.** B **5.** A **6.** D **7.1** D **7.2** C **7.3** C **8.1** C **8.2** B **8.3** C **9.** True **10.** False **11.** True **12.** False **13.** False **14** m = 1

15. 2^{10} **16.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **17.** x = n; y = r + 1 **18.**4

EXERCISE # 4

1. B **2.** D **3.** D **4.** C **6.** B **7.** D **9.** C

10. C **11.** A **12.** 41 **14.** D **15.** B **16.** C **17.** C

18. B **19.** A **20.** A **21.** B **22.** C **23.** B **24.** A

25. B **26.** B **27.** C **28.** B **29.** C **30.** D **31.** D

32. C **33.** A **34.** C **35.** D **36.** C

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $(1 + 2x)^n$ के प्रसार में गुणाकों का योग 6561 है, तक प्रसार में x =1/2 के लिए महत्तम पद है–
(A) 4^{th} (B) 5^{th} (C) 6^{th} (D) इनमें से कोई नहीं

2. व्यंजक $\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}\right)^6+\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}}\right)$ कितनी घात का व्यंजक है।
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

3. $(1 + x)^{50}$ के प्रसार में x की विषमघातों के गुणांकों का योग है–
(A) 2^{48} (B) 2^{50} (C) 2^{51} (D) 2^{49}

4. $4\{^nC_1 + 4.\ ^nC_2 + 4^2.\ ^nC_3 + ... + 4^{n-1}\}$ का मान है–
(A) 0 (B) $5^n + 1$ (C) 5^n (D) $5^n - 1$

5. $(1 + x^2)^5 . (1 + x)^4$ के प्रसार में x^5 का गुणांक है–
(A) 40 (B) 50 (C) 30 (D) 60

6. $n > 3$ के लिए $1.2\ {}^nC_r - 2.3\ {}^nC_{r-1} + \ldots\ldots + (-1)^r (r+1)(r+2)$

(A) ${}^{n-3}C_r$ (B) $2.\ {}^{n-3}C_r$ (C) ${}^{n+1}C_{r+1}$ (D) ${}^{n-2}C_r$

7. $(1 + x + x^3 + x4)^n$ के प्रसार में x^{15} का गुणांक है–

(A) $\sum_{r=0}^{5} {}^nC_{15-3r}\ {}^nC_{3-r}$ (B) $\sum_{r=0}^{5} {}^nC_{5r}$ (C) $\sum_{r=0}^{5} {}^nC_{3r}$ (D) $\sum_{r=0}^{3} {}^nC_{3-r}\ {}^nC_{5r}$

8. यदि n एक सम प्राकत संख्या है तथा $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ के प्रसार में x^r का गुणांक 2^n है $(|x| < 1)$ तब :

(A) $r \le n/2$ (B) $r \ge (n-2)/2$ (C) $r \le (n+2)/2$ (D) $r \ge n$

9. व्यंजक $(x + {}^{2n+1}C_0)(x + {}^{2n+1}C_1)(x + {}^{2n+1}C_2).....(x + {}^{2n+1}C_n)$ में x^n का गुणांक है–

(A) 2^{n+1} (B) $2^{2n+1} - 1$ (C) 2^n (D) इनमें से कोई नहीं

10. $(1 + x)^n (1 + y)^n (1 + z)^n$ के प्रसार में r घात के पदो के गुणांकों का योग है–

(A) ${}^{n^3}C_r$ (B) ${}^nC_{r^3}$ (C) ${}^{3n}C_r$ (D) $3\ {}^{2n}C_r$

11. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार है कि $n \geq 3$ तब n पदों के योग होगा–

$$1.n - \frac{(n-1)}{1!}(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(n-2) - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(n-3) + ...\text{is :}$$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) इनमें से कोई नहीं

12. $\binom{100}{0}\binom{200}{150} + \binom{100}{1}\binom{200}{151} + ... + \binom{100}{50}\binom{200}{200}$ का मान है जहाँ $^nC_r = \binom{n}{r}$

(A) $\binom{300}{50}$ (B) $\binom{100}{50} \times \binom{200}{150}$ (C) $\left[\binom{200}{150}\right]^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

13. $\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{r-1} {^nC_r}\ {^nC_p}\, 2^p\right)$ बराबर है–

(A) $4^n - 3^n + 1$ (B) $4^n - 3^n - 1$ (C) $4^n - 3^n + 2$ (D) $4^n - 3^n$

14. यदि $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ के प्रसार में (r + 1) वें पद में a तथा b की घात बराबर है तब r का मान है–

(A) 9 (B) 10 (C) 8 (D) 6

15. यदि $(1 + x)^n$ के प्रसार में p वाँ (p + 1) वाँ and (p + 2) वाँ पद समान्तर श्रेढ़ी में है, तब –

(A) $n^2 - 2np + 4p^2 = 0$ (B) $n^2 - n(4p + 1) + 4p^2 - 2 = 0$

(C) $n^2 - n(4p + 1) + 4p^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

16. $\sum_{m=0}^{100} {^{100}C_m}(x-3)^{100-m}.2^m$ के प्रसार में x^{53} का गुणांक है

(A) $^{100}C_{47}$ (B) $^{100}C_{53}$ (C) $-\,^{100}C_{53}$ (D) $-\,^{100}C_{100}$

17. $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में यदि महत्तम गुणांक वाला पद महत्तम हो, तो x किस अंतराल में स्थित होगा।

(A) $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n-1}\right)$ (B) $\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$ (C) $\left(\frac{n}{n+2}, \frac{n+2}{n}\right)$ (D)

18. $C_0 - 2.3\, C_1 + 3.3^2\, C_2 - 4.3^3\, C_3 + ... + (-1)^n (n + 1)\, C_n\, 3^n$

(A) $(-1)^n 2^n\left(\frac{3n}{2}+1\right)$ (B) $2^m\left(n+\frac{3}{2}\right)$ (C) $2^n + 1.5\, n\, 2^n$ (D) $(-2)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{^nC_0 + ... + ^nC_n}{^nP_n}$ का मान है–

(A) e^2 (B) e (C) 9 (D) इनमें से कोई नहीं

20. एक पूर्णांक तथा इसके घन का अंतर विभाजित है–
(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) इनमें से कोई नहीं

21. व्यंजक $(2 + x - x^2)^5$ के प्रसार में x की न्यूनतम अभाज्य घात का गुणांक है–
(A) 160 (B) 0 (C) 20 (D) 60

22. व्यंजक $(x + 2y - 3x)^{20}$ के प्रसार में सभी पदों के गुणांकों का योग, जिनमें कि 'z' विषम घात में आता है जबकि y कभी नहीं आता है, है–
(A) $2^{40} - 2^{20}$ (B) $2^{39} - 2^{19}$ (C) $2^{19} - 2^{39}$ (D) $2^{20} - 2^{40}$

एक से अधिक विकल्प सही

23. यदि $(1 + x)^n$ के प्रसार में विषम पदों का योग a तथा सम पदों का योग b है तब $(1 - x^2)^n$ =
(A) $a^2 - b^2$ (B) $a^2 + b^2$ (C) $b^2 - a^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

24. $n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$ है–

(A) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^3$ से छोटा (B) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^3$ से बड़ा या बराबर

(C) $(n!)^3$ से छोटा (D) $(n!)^3$ से छोटा

25. यदि $\sum_{r=0}^{20} a_1 (x-2)^r = \sum_{r=0}^{2n} b_r (x-3)^r$ तथा $a^k = 1$ सभी $k \geq n$ के लिए, तब b_n का मान है–

(A) $^{2n+1}C_n$ (B) $^{2n+1}C_{n+1}$ (C) $^{2n}C_n$ (D) $^{2n-1}C_{n-1}$

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. व्यंजक $(x + x^t)^5$ में x का मान ज्ञात करो यदि व्यंजक का तीसरा पद 10,00,000 है जहाँ $t = \log_{10}x$.

2. यदि $(1 - x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^r का गुणांक a_r है, तब सिद्ध करो कि
$a_{r-1} + a_{2n-r} = 0$.

3. यदि $x = (2+\sqrt{3})^n, n \in N$ को प्रदर्शित करता है [x] x का पूर्णांक भाग है तब x + x^2 – x[x] का मान ज्ञात करो।

4. $(1+x)^{n+1}$ का द्विपद प्रसार लिखों। जब $x = 8$ तब दर्शाइए कि $9^{n+1} - 8n - 9$; 64 से विभाजित है जब n एक धनात्मक पूर्णांक है।

5. $1^2 . C_0 + 2^2 . C_1 + 3^2 . C_2 + 4^2 . C_3 + \ldots + (n+1)^2 C_n = 2^{n-2} (n+1)(n+4)$.

6. $(1-x)^{-n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$, $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ का मान ज्ञात करो–

7. $32^{32^{32}}$ को जब 7 से विभाजित किया जाए तो शेषफल है–

8. यदि n एक से बड़ा पूर्णांक है तब दर्शाइए: $a - {}^nC_1(a-1) + {}^nC_2(a-2) - \ldots\ldots + (-1)^n (a-n) = 0$.

9. यदि $(1+x)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots\ldots$, तब सिद्ध करो कि

(a) $p_0 - p_2 + p_4 - \ldots\ldots = 2_{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$ (b) $p_1 - p_3 + p_5 - \ldots\ldots = 2_{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$

10. सिद्ध करो कि

$$4C_0 + \frac{4^2}{2}.C_1 + \frac{4^3}{3}C_2 + \ldots\ldots + \frac{4^{n+1}}{n+1}C_n = \frac{5^{n+1}-1}{n+1}$$

Answers

EXERCISE # 1

1. B **2.** B **3.** D **4.** D **5.** D **6.** B **7.** A
8. D **9.** C **10.** C **11.** A **12.** A **13.** D **14.** A
15. B **16.** C **17.** B **18.** A **19.** C **20.** B **21.** B
22. C **23.** A **24.** BD **25.** AB

EXERCISE # 2

1. X = 10 OR $10^{-5/2}$ **3.** 1 **16.** $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

7. 4